

EXERCICES SUR LES NOMBRES COMPLEXES



Classification Thèmes de MégaMaths

Docs de Dany-Jack MERCIER

Exercice 1 Soient z et z' deux complexes.

1) Montrer que $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$, puis donner une interprétation géométrique de ce résultat.

2) Soit u un complexe tel que $zz' = u^2$. Montrer l'égalité

$$|z| + |z'| = \left| \frac{z + z'}{2} + u \right| + \left| \frac{z + z'}{2} - u \right|.$$

Solution :

1)

$$z, z' \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} |z+z'|^2 &= (z+z')(\bar{z}+\bar{z}') \\ &= |z|^2 + |z'|^2 + \underbrace{z\bar{z}'}_{2\operatorname{Re}(z\bar{z}')} + \bar{z}z' \end{aligned}$$

$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$$

$$|z|^2 = |z|^2$$

$$|z|^2 = z\bar{z}$$

$$|z|^2 = \sqrt{z\bar{z}z\bar{z}} = z\bar{z}$$

$$|z| + |z'| \neq |z+z'|$$

$$(x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$$

b)

$$u^2 = z\bar{z}' \quad \left\{ \begin{array}{l} z = u^2 \\ \bar{z}' = \bar{u}^2 \end{array} \right.$$

$$|z| + |z'| = \left| \frac{z+z'}{2} + u \right| + \left| \frac{z+z'}{2} - u \right|$$

$$|z|^2 + |z'|^2 + 2|z\bar{z}'| = \left| \frac{z+z'}{2} + u \right|^2 + \left| \frac{z+z'}{2} - u \right|^2 + 2 \left| \frac{(z+z')^2}{4} - u^2 \right|$$

$$2 \left(\left| \frac{z+z'}{2} \right|^2 + |u|^2 \right)$$

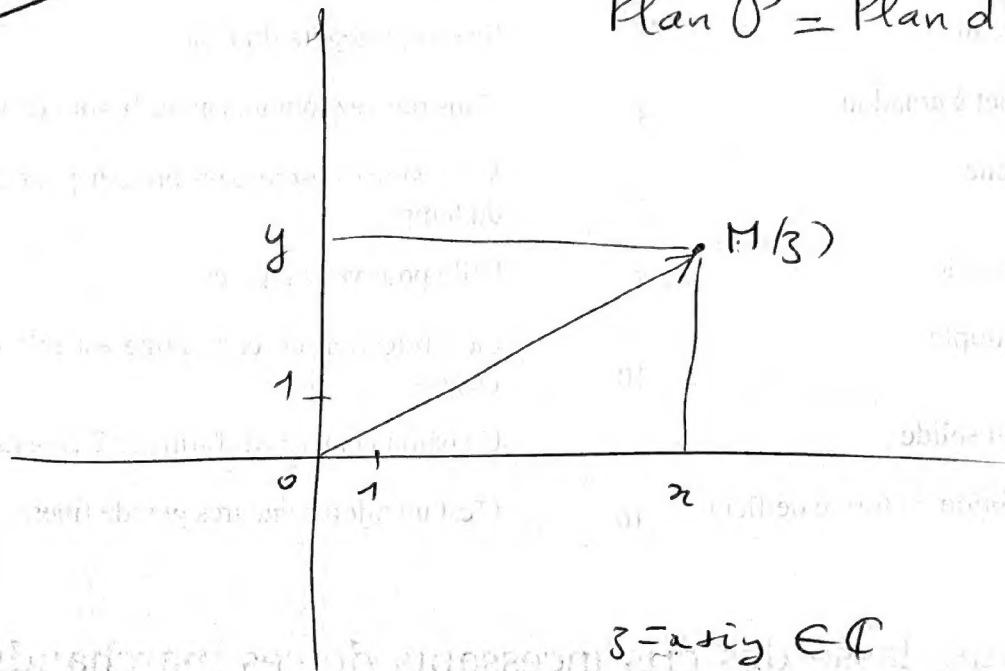


$$|z|^2 + |z'|^2 + 2|z\bar{z}'| = \frac{1}{2}|z+z'|^2 + 2|z\bar{z}'| + \frac{1}{2}|(z+z')^2 - 4z\bar{z}'|$$

$$2(|z|^2 + |z'|^2) = \frac{1}{2}|z+z'|^2 + |z-z'|^2$$

Interp. geom

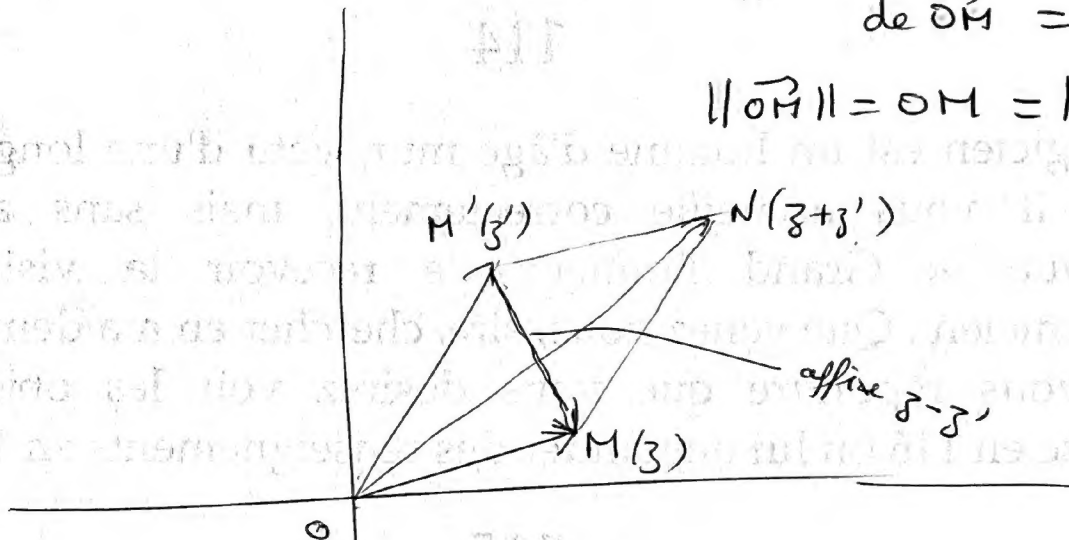
Plan $P =$ Plan d'Argand -
Cauchy



$$z = x + iy \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} \text{affixe de } M &= z \\ \text{de } \vec{OM} &= z \end{aligned}$$

$$\|\vec{OM}\| = OM = |z|$$



Traduction:

$$ON^2 + MM'^2 = 2(OM^2 + OM'^2)$$

Identité du parallélogramme

$$z - z' = \text{aff}(\vec{M'M})$$

$$\vec{OM} - \vec{OM'} = \vec{M'M}$$

Soient α, β, γ trois nombres complexes de module 1 qui vérifient

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

On désire montrer que α, β, γ sont les affixes des sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle de rayon 1.

1°/ 1^{re} méthode : Montrer que l'on peut se ramener au cas où $\alpha = 1$, puis écrire $\beta = e^{i\theta}$ et $\gamma = e^{i\eta}$ pour obtenir 2 équations en θ et η ... conclure.

2°/ 2^{de} méthode : Montrer que $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0$, et en déduire que α, β, γ sont racines d'un polynôme du type $X^3 - a$, où $a \in \mathbb{C}$.

1°/ $\alpha \neq 0$, et $\alpha + \beta + \gamma = 0$ sera équivalent à $1 + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$.
 $\frac{\beta}{\alpha}$ et $\frac{\gamma}{\alpha}$ sont des nbs complexes de module 1, et le lemme :

|| Lemme 1 : Si $|\beta| = |\gamma| = 1$ et $1 + \beta + \gamma = 0$, alors $\beta = e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}$ et $\gamma = e^{\mp i\frac{2\pi}{3}}$

permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma = 0 &\Rightarrow \frac{\beta}{\alpha} = e^{\pm i\frac{2\pi}{3}} \text{ et } \frac{\gamma}{\alpha} = e^{\mp i\frac{2\pi}{3}} \\ &\Rightarrow \beta = \alpha e^{\pm i\frac{2\pi}{3}} \text{ et } \gamma = \alpha e^{\mp i\frac{2\pi}{3}} \end{aligned}$$

ce qui signifie bien que α, β, γ sont les affixes des sommets d'un triangle équilatéral. \square

Montrons donc le lemme 1 : Soit $\beta = e^{i\theta}$ et $\gamma = e^{i\eta}$

$$1 + \beta + \gamma = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \cos \theta + \cos \eta = 0 \\ \sin \theta + \sin \eta = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos \frac{\theta + \eta}{2} \cos \frac{\theta - \eta}{2} = -1 \\ 2 \sin \frac{\theta + \eta}{2} \cos \frac{\theta - \eta}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin \frac{\theta + \eta}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\theta + \eta}{2} = k\pi \Rightarrow \theta = -\eta + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

En remplaçant dans (1):

$$\cos \eta = -\frac{1}{2}$$

$$\text{donc } \eta = \pm \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}, \text{ puis } \theta = -\eta + k2\pi \equiv \mp \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$$

Finalement $(1, \beta, \gamma) = (1, j, j^2)$ ou $(1, j^2, j)$, et tout est prouvé.

$$2^\circ \quad \alpha + \beta + \gamma = 0 \text{ entraîne } \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0 \quad (\text{puisque } \bar{\alpha} = \frac{1}{\alpha}, \dots)$$

$$\text{d'où } \frac{\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta}{\alpha\beta\gamma} = 0, \text{ puis } \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0.$$

On déduit:

$$\begin{aligned} (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma) &= X^3 - \underbrace{(\alpha+\beta+\gamma)}_{=0} X^2 + \underbrace{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}_{=0} X - \alpha\beta\gamma \\ &= X^3 - a \quad \text{soit } a = \alpha\beta\gamma \end{aligned}$$

Si

Ainsi, quitte à échanger les notations β et γ , on aura:

$$\beta = j\alpha \quad \text{et} \quad \gamma = j^2\alpha$$

et (α, β, γ) seront les affixes des sommets d'un triangle équilatéral.

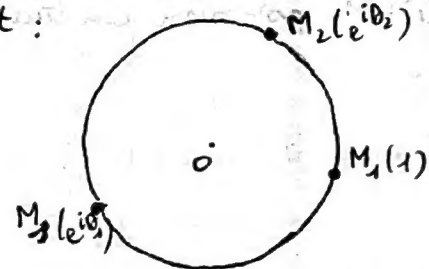
cqfd

Application des nombres complexes à la géométrie :

Montrer qu'un triangle est équilatéral si son c.d.g coïncide avec le centre du cercle circonscrit. Connaissez-vous une démonstration géométrique de ce résultat ?

1) Supposons que $M_1 M_2 M_3$ soit un triangle dont le c.d.g coïncide avec le centre du cercle circonscrit. Dans un bon repère, on pourra alors supposer que les affixes z_k de ces sommets vérifient :

$$\begin{cases} z_k = e^{i\theta_k} \\ z_3 = 1 \\ z_1 + z_2 + z_3 = 0 \end{cases}$$



Tout revient donc à résoudre l'équation : $1 + e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} = 0$

On obtient :

$$\begin{cases} -1 + \cos \theta_1 + \cos \theta_2 = 0 & (1) \\ \sin \theta_1 + \sin \theta_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_1 \equiv -\theta_2 \pmod{2\pi} \\ \text{ou} \\ \theta_1 \equiv \pi + \theta_2 \pmod{2\pi} \end{cases}$$

$\theta_1 \equiv \pi + \theta_2$ entraînerait $1 + \cos(\pi + \theta_2) + \cos \theta_2 = 0$, i.e. $1 = 0$. Donc $\theta_1 \equiv -\theta_2$ et (1) devient :

$$1 + 2 \cos \theta_1 = 0$$

$$\cos \theta_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\theta_1 \equiv \pm \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$$

Cd : $\theta_1 \equiv \pm \frac{2\pi}{3}$ et $\theta_2 \equiv \mp \frac{2\pi}{3}$. Le triangle $M_1 M_2 M_3$ sera bien équilatéral.

2) Démonstration géométrique :

On connaît la relation d'Euler $\vec{OH} = 3 \vec{OG}$ entre le centre O du cercle circonscrit à $M_1 M_2 M_3$, le c.d.g de ce triangle et son orthocentre H .

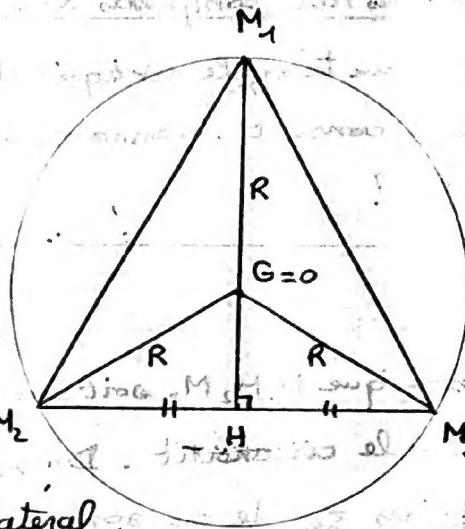
Ainsi $G = O$ si $O = H$. Mais alors $(M_1 O)$ sera à la fois hauteur de $M_1 M_2 M_3$ et médiane de $[M_2 M_3]$, d'où $M_1 M_3 = M_1 M_2$. On recommence avec $(M_2 O)$ pour conclure à $M_1 M_3 = M_1 M_2 = M_2 M_3$, i.e. $M_1 M_2 M_3$ est équilatéral. \square

* 2^e démonstration géométrique:

Si $G=O$, on a:

$$GH = \frac{GM_1}{2} = \frac{R}{2}$$

$$HM_3 = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = R \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow M_2M_3 = R\sqrt{3}$$

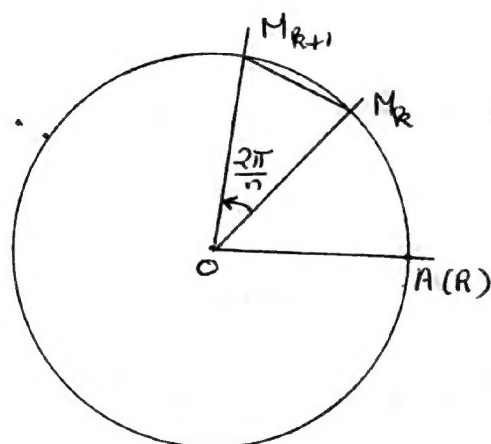


En recommençant, on conclut:

$$M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_1 = R\sqrt{3}$$

et $M_1M_2M_3$ est bien un triangle équilatéral.

NB: Dans cette 2^e solution, on utilise que l'hypothèse $G=O$. L'angle droit en H n'est pas obtenu, en disant que M_1H est une hauteur de $M_1M_2M_3$, mais en notant que OM_2M_3 est isocèle en O et que H est le milieu de $[M_1M_3]$. (On prouverait aussi, de cette manière, que $G=O \Rightarrow G=O$ = orthocentre de $M_1M_2M_3$)



Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On note C le cercle de centre O et de rayon $R > 0$ et A le point de C d'affixe R .

Étant donné un entier $n \geq 2$, on note r la rotation de centre O d'angle $\frac{2\pi}{n}$.

On considère la suite de points $(M_k)_{k \geq 0}$ de C définie par la relation de récurrence $M_{k+1} = r(M_k)$ et la condition initiale $M_0 = A$.

On note z_k l'affixe de M_k .

1. a) Pour tout $k \geq 0$, exprimer z_{k+1} en fonction de z_k .

b) En déduire l'expression de z_k en fonction de k et n .

c) Comparer M_n et M_0 .

d) Faire une figure lorsque $n = 16$ (On prendra $R = 4$ cm.)

2. a) Prouver que, pour tout $k \geq 0$, $M_k M_{k+1} = 2R \sin \frac{\pi}{n}$.

b) On note $L_n = M_0 M_1 + M_1 M_2 + \dots + M_{n-1} M_n$ le périmètre du polygone régulier (M_0, M_1, \dots, M_n) .

Déterminer la limite de L_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Interpréter géométriquement le résultat ainsi obtenu.

Programme abordé :

- Rotation et nombres complexes.
- Suite de nombres complexes.
- Module d'un nombre complexe et distance de deux points du plan.
- Applications géométriques.

Sol : $z_{k+1} = e^{i \frac{2\pi}{n}} z_k$ est une suite géométrique, d'où $z_k = e^{i \frac{2\pi}{n} k} z_0$

Bien sûr $z_n = z_0 \Rightarrow M_n = M_0$

La formule d'Al Kashi permet d'écrire :

$$\begin{aligned} M_k M_{k+1} &= OM_{k+1}^2 + OM_k^2 - 2 OM_{k+1} \cdot OM_k \cos(\angle M_k O M_{k+1}) \\ &= 2R^2 - 2R^2 \cos \frac{2\pi}{n} = 2R^2 - 2R^2 \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{n}\right) = 4R^2 \sin^2 \frac{\pi}{n} \end{aligned}$$

d'où $M_k M_{k+1} = 2R \sin \frac{\pi}{n}$

Alas $L_n = M_0 M_1 + \dots + M_{n-1} M_n = n \cdot 2R \sin \frac{\pi}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2\pi R$ qui représente le périmètre du cercle C (C.F.T)

Obj : • Introduire une suite géom. de nbres complexes et utiliser l'exp. complexe d'une rotation.

• Utiliser la formule d'Al Kashi, ou ... rester "entre nbres complexes" en laissant le choix à l'élève ...

Autre démonstration : $M_k M_{k+1} = |z_{k+1} - z_k| = |e^{i \frac{2\pi}{n}} z_k - z_k| = |e^{i \frac{2\pi}{n}} - 1| R = |e^{i \frac{\pi}{n}} - e^{-i \frac{\pi}{n}}| R$
 $= 2R \sin \frac{\pi}{n}$ est aussi un bon choix !

Bac Ant. Guy. sept 91, CE.

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, on associe au pt M d'affixe z , $z \neq -3i$, le pt M' d'affixe

$$z' = \frac{z-1+i}{3-i}$$

- 1) Déterminer et construire l'ensemble des pts M tq z' soit un nbre réel
- 2) " " " l'ensemble des pts M tq $|z'| = 2$

1) Si $z = x + iy$, $z' = \frac{x-1+i(1+y)}{3+y-ix} = \frac{(x-1+i(1+y))(3+y+ix)}{|3+y-ix|^2}$

donc $z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im } x(x-1) + (1+y)(3+y) = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + y^2 + 4y + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y+2)^2 = \frac{5}{4}$$

On obtient le cercle de centre $(+\frac{1}{2}, -2)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

2) $|z'| = 2 \Leftrightarrow \frac{MA}{MB} = 2 \Leftrightarrow A(1-i) \text{ et } B(-3i)$

$$\Leftrightarrow MA^2 - 4MB^2 = 0 \quad (\text{Fct scalaire de Leibniz})$$

$$\Leftrightarrow (\vec{MG} + \vec{GA})^2 - 4(\vec{MG} + \vec{GB})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3\vec{MG}^2 + GA^2 - 4GB^2 + 2\vec{MG} \cdot (\underbrace{\vec{GA} - 4\vec{GB}}_{=0}) = 0$$

si G = baryc. de A(1), B(-4)

$$\Leftrightarrow MG^2 = \frac{1}{3}(GA^2 - 4GB^2)$$

Comme G d'affixe $\frac{1}{-3}(1-i - 4(3i)) = -\frac{1}{3} + \frac{13}{3}i$, on trouve

$$|z'| = 2 \Leftrightarrow MG^2 = \frac{68}{9} \Leftrightarrow MG = \frac{2\sqrt{17}}{3}$$

et l'ensemble cherché est le cercle de centre G et de rayon $\frac{2\sqrt{17}}{3}$.

.../...

- Objectif :
- Savoir représenter qu'un nombre complexe est dans \mathbb{R}
 - Traduire un pt connaissant les deux complexes (ici $1/2i$) en un pt géométrique figurant au programme (Fct malade de Leibniz)

Technique employée au 2) : Inverse des pts M & N $\frac{MA}{MB} = k$

Autre méthode : Remarque (2) en exploitant $1/2i$ en fait de partie réelle et partie imaginaire ...

Etude de quelques transformations complexes

I Etude de $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$

* $h: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ $h(z) = \frac{1}{\bar{z}} = \bar{z}$ donc $h^2 = \text{Id}_{\mathbb{C}^*}$

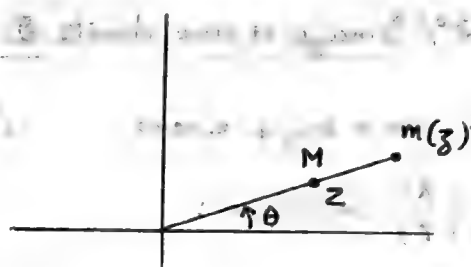
$z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$

h est involutive, donc bijective et $h^{-1} = h$.

* Si $z = x + iy$, $h(z) = X + iY = \frac{1}{x - iy} = \frac{x + iy}{x^2 + y^2}$

donc $\begin{cases} X = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ Y = \frac{y}{x^2 + y^2} \end{cases}$

* Si $z = \rho e^{i\theta}$, $Z = \frac{1}{\rho} e^{i\theta}$.



$\overline{Om} \cdot \overline{OM} = 1$

1° Image d'un cercle

$\mathcal{C}: (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

$m\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ d'affixe $z = x + iy$

$M\left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right)$ d'affixe $Z = X + iY$; $h(z) = Z$ définit une transformation du plan privé de l'origine.

Si $m \in \mathcal{C}$, $\left(\frac{x}{x^2+y^2} - a\right)^2 + \left(\frac{y}{x^2+y^2} - b\right)^2 = r^2$

$$\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2ax}{x^2+y^2} - \frac{2by}{x^2+y^2} + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

$$1 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2)(x^2 + y^2) = 0 \quad (*)$$

1° cas: Si $a^2 + b^2 \neq r^2$ ie $O \notin \mathcal{C}$, (*) est l'équation d'un cercle ne passant pas par O :

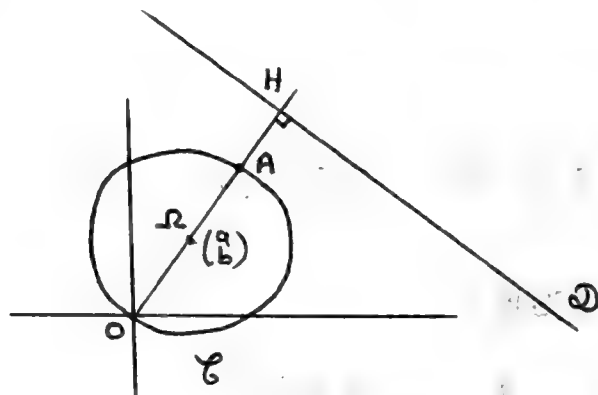
$$\left(x + \frac{a}{r^2 - a^2 - b^2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{r^2 - a^2 - b^2}\right)^2 = \frac{r^2}{(r^2 - a^2 - b^2)^2}$$

$h(\mathcal{C})$ est un cercle.

2^e cas : Si $a^2 + b^2 = r^2$, ie $O \in \mathcal{C}$, (*) est l'équation d'une droite \mathcal{D} :

$$1 - 2aX - 2bY = 0$$

\mathcal{D} ne contient pas l'origine. On peut remonter les calculs de sorte que l'image du cercle \mathcal{C} soit droite \mathcal{D} de vecteur normal $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$



$$h(A) = H, \text{ donc } \begin{cases} H \in [OA) \\ OH = \frac{1}{OA} = \frac{1}{2r} \end{cases}$$

2° Image d'une droite \mathcal{D} .

$$\mathcal{D} : ax + by + c = 0 \quad (a, b) \neq (0, 0)$$

$h(m) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ vérifiera :

$$a \frac{X}{X^2 + Y^2} + b \frac{Y}{X^2 + Y^2} + c = 0$$

$$aX + bY + c(X^2 + Y^2) = 0$$

1^{er} cas : Si $c \neq 0$, ie $O \notin \mathcal{D}$, $h(\mathcal{D})$ sera un cercle passant par O privé du point O .

2^e cas : Si $c = 0$ ie $O \in \mathcal{D}$, $h(\mathcal{D})$ sera la droite d'équation $aX + bY = 0$, ie \mathcal{D} , privée du point O .

|| Ccl : L'application $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$ de \mathbb{C}^* dans \mathbb{C}^* transforme les cercles-droites (éventuellement privés de O) en cercles-droites (évent. privés de O).

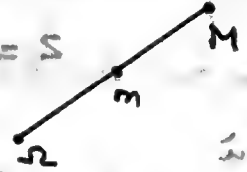
3° Interprétation géométrique

E plan euclidien, $k \in \mathbb{R}^*$, $\Omega \in E$

$$i_{\Omega, k}: E \setminus \{\Omega\} \rightarrow E \setminus \{\Omega\}$$

$$m \mapsto M \text{ tq } \begin{cases} M \in (\Omega m) \\ \vec{\Omega m} \cdot \vec{\Omega M} = k \end{cases}$$

est l'inversion de centre Ω et de rapport k .



a) Propriétés

1) $i_{\Omega, k}$ est involutive : $i_{\Omega, k}^2 = \text{id}$

2) $i_{\Omega, k_1} \circ i_{\Omega, k_2} = h_{\Omega, \frac{k_1}{k_2}}$

3) Dans \mathbb{C} , $i_{\Omega, k}: z \mapsto Z = z_0 + \frac{k}{\bar{z} - \bar{z}_0}$ où z_0 est l'affixe de Ω .

preuve:

1) trivial

$$2) m \xrightarrow{i_{\Omega, k_2}} M_1 \xrightarrow{i_{\Omega, k_1}} M$$

$$\begin{cases} M_1 \in (m\Omega) \\ \vec{\Omega m} \cdot \vec{\Omega M_1} = k_2 \end{cases} \quad \begin{cases} M \in (\Omega M_1) \\ \vec{\Omega M_1} \cdot \vec{\Omega M} = k_1 \end{cases}$$

$$M_1, m, \Omega, M \text{ sont alignés donc } \vec{\Omega M} = \frac{k_1}{\vec{\Omega M_1}} = \frac{k_1}{\frac{k_2}{\vec{\Omega m}}} = \frac{k_1}{k_2} \vec{\Omega m}$$

$$3) \vec{\Omega m} \cdot \vec{\Omega M} = k \text{ et } \vec{\Omega M} = \lambda \vec{\Omega m} \text{ où } \lambda = \frac{k}{\vec{\Omega m}^2}$$

$$\text{Donc } Z - z_0 = \frac{k}{|z - z_0|^2} (z - z_0) = \frac{k}{\bar{z} - \bar{z}_0}$$



NB : Une inversion n'est pas une application affine car ne transforme pas une droite en une droite.

Par contre, $i_{\Omega, k}$ transformera un cercle-droite (évent. privé de Ω) en un cercle-droite (évent. privé de Ω) : on utilise 3)

$$z = z_0 + \frac{k}{\bar{z} - \bar{z}_0} \text{ montre que } i_{\Omega, k} = t_{z_0} \circ h_{0, k} \circ i \circ t_{-z_0}$$

où

t_{z_0} = translation de vecteur d'affixe z_0

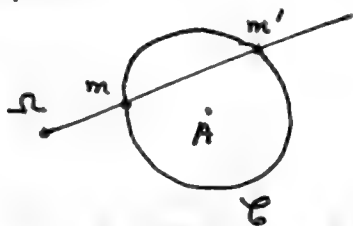
$h_{0, k}$ = homothétie de centre O de rapport k

i = inversion de pôle O et de rapport 1 déjà rencontrée au 1° et 2°
 $(i(z) = \frac{1}{\bar{z}})$

D'où le résultat compte tenu des 1° et 2° (pour i) et des propriétés des homothéties-translations.

b) Image d'un cercle ne passant pas par le centre de l'inversion

* Remarque :



$$p = \vec{\Omega m} \cdot \vec{\Omega m'} = \Omega A^2 - r^2 \doteq \text{puissance de } \Omega \text{ à } C$$

$i_{\Omega, p}$ conserve globalement le cercle C.

* $i_{\Omega, k}$ et $C = C(A, r)$ donnés.

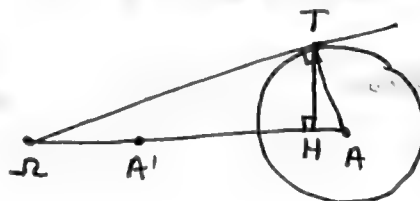
$$i_{\Omega, k} = h_{\Omega, \frac{k}{p}} \circ i_{\Omega, p} \Rightarrow i_{\Omega, k}(C) = h_{\Omega, \frac{k}{p}}(i_{\Omega, p}(C))$$

$i_{\Omega, k}(C)$ sera donc le cercle de centre $h_{\Omega, \frac{k}{p}}(A)$ et de rayon $|\frac{k}{p}|r$

ex : Caractériser le pt H du plan tel que $i_{\Omega, k}(H) = A'$ centre de $i_{\Omega, k}(C)$.

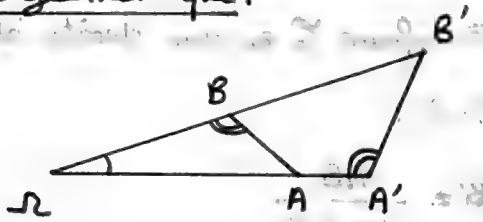
$$\text{Gn'a } i_{\Omega, k}(H) = h_{\Omega, \frac{k}{p}}(A) \Rightarrow i_{\Omega, p}(H) = A \Rightarrow \vec{\Omega A} \cdot \vec{\Omega H} = p \Rightarrow \vec{\Omega A} \cdot \vec{\Omega H} = \vec{\Omega T}^2$$

égalité qui montre que H est la projection orthogonale de T sur AΩ.



$$c) \begin{cases} i_{\Omega, k}(A) = A' \\ i_{\Omega, k}(B) = B' \end{cases} \Rightarrow A'B' = |k| \frac{AB}{\Omega A \cdot \Omega B}$$

preuve géométrique :



ΩAB et $\Omega B'A'$ sont indirectement semblables car :

$$\begin{cases} \Omega A \cdot \Omega A' = k = \Omega B \cdot \Omega B' \Rightarrow \frac{\Omega B'}{\Omega A} = \frac{\Omega A'}{\Omega B} \\ \text{et} \\ \overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B} = -\overrightarrow{\Omega B'}, \overrightarrow{\Omega A'} \end{cases}$$

On déduit $\frac{\Omega B'}{\Omega A} = \frac{\Omega A'}{\Omega B} = \frac{A'B'}{AB} \Rightarrow A'B' = \frac{\Omega A'}{\Omega B} \cdot AB = |k| \frac{AB}{\Omega A \cdot \Omega B}$ oui

preuve vectorielle :

$\overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{\Omega A'} = k \Rightarrow \overrightarrow{\Omega A'} = \lambda \overrightarrow{\Omega A}$ satisfait $\lambda = \frac{k}{\Omega A^2}$

On aura $\begin{cases} \overrightarrow{\Omega A'} = \frac{k}{\Omega A^2} \overrightarrow{\Omega A} \\ \overrightarrow{\Omega B'} = \frac{k}{\Omega B^2} \overrightarrow{\Omega B} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{A'B'}^2 = (\overrightarrow{A'\Omega} + \overrightarrow{\Omega B'})^2$

$$= k^2 \left(\frac{\overrightarrow{A\Omega}^2}{\Omega A^4} + \frac{\overrightarrow{\Omega B}^2}{\Omega B^4} \right)$$

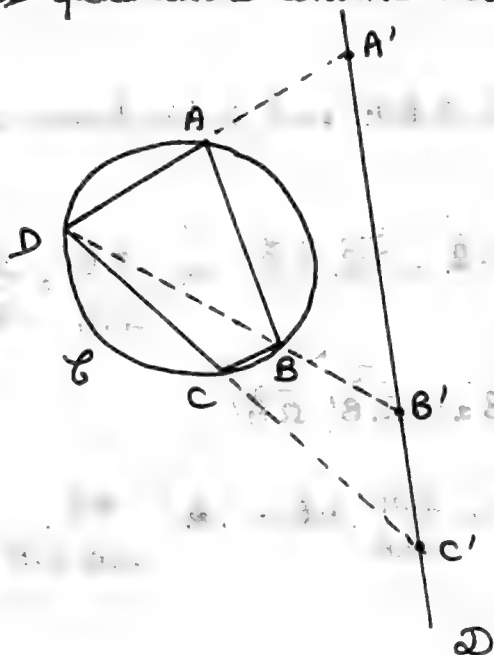
$$= k^2 \left[\frac{1}{\Omega A^2} + \frac{1}{\Omega B^2} + 2 \frac{\overrightarrow{A\Omega} \cdot \overrightarrow{\Omega B}}{\Omega A^2 \cdot \Omega B^2} \right]$$

$$= k^2 \frac{(\overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega B})^2}{\Omega A^2 \cdot \Omega B^2} = k^2 \frac{AB^2}{\Omega A^2 \cdot \Omega B^2}$$

CQFD

univ 0006 4°/ Théorème de Ptolémée

* ABCD quadrilatère convexe inscrit dans un cercle \mathcal{C}



$i_{D,1}$ transforme \mathcal{C} en une droite \mathcal{D} et (cf 3°c) :

$$A'B' = \frac{AB}{DA \cdot DB}$$

$$B'C' = \frac{BC}{DB \cdot DC}$$

$$A'C' = \frac{AC}{DA \cdot DC}$$

$$A'C' = A'B' + B'C' \Rightarrow \frac{AC}{DA \cdot DC} = \frac{AB}{DA \cdot DB} + \frac{BC}{DB \cdot DC}$$

$$\boxed{AC \cdot DB = AB \cdot DC + BC \cdot DA}$$

diagonales

côtés opposés

(*)

* Réc., si ABCD est un quadrilatère convexe vérifiant (*), notons

$i_{D,1}(A) = A' \dots$ On obtient $A'C' = A'B' + B'C' \Rightarrow A', B', C'$ alignés sur une droite \mathcal{D} .

\mathcal{D} ne contient pas D donc A, B, C sont sur le cercle $i_{D,1}(\mathcal{D})$ qui contient D (cf 2°).

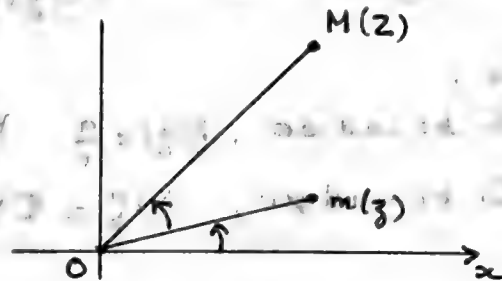
CQFD

II Étude de $z \mapsto az$

$$z = re^{i\theta}$$

$$Z = az \Leftrightarrow \begin{cases} |Z| = |a||z| \Rightarrow OM = |a| Om & \text{en notant } M(Z) \text{ et } m(z) \\ \arg Z = \arg a + \arg z & \in [2\pi] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \arg Z - \arg z &= \arg a \\ \overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Om} &= \arg a \\ \overrightarrow{Om}, \overrightarrow{OM} &= \arg a \end{aligned}$$



$f(z) = az$ est la composée de la rotation $r_{O, \arg a}$ et de l'homothétie $h_{O, |a|}$.
C'est la similitude directe de centre O , d'angle $\arg a$ et de rapport $|a|$.

III Étude de $z \mapsto az + b$ ($a, b \in \mathbb{C}$)

Recherche d'un point fixe: $az_0 + b = z_0 \Leftrightarrow (1-a)z_0 = b$

1) Si $a = 1$, pas de pt fixe sauf si $b = 0$, mais alors $f = \text{Id}$. Si $b \neq 0$, $f(z) = z + b$ est une translation de vecteur d'affixe b .

2) Si $a \neq 1$, un unique pt fixe $z_0 = \frac{b}{1-a}$

$$\begin{cases} Z = az + b \\ z_0 = az_0 + b \end{cases}$$

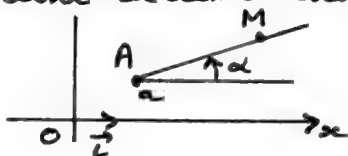
$Z - z_0 = a(z - z_0)$ On retrouve le II : f est la similitude de centre z_0 , d'angle $\arg a$ et de rapport $|a|$.

ex: Lignes de niveau de $z \mapsto |z-a|$ et $z \mapsto \arg(z-a)$.

• $|z-a| = k$, $k \in \mathbb{R}_+$ donné, équivaut à $m(z) \in \mathcal{C}(A, k)$ $A(a)$.

• $\arg(z-a) = \alpha \in [2\pi]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ donné, équivaut à $\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Am} = \alpha \in [2\pi]$.

On obtient la demi-droite issue de A faisant l'angle α avec \vec{i} .



IV Etude de $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ (transformation homographique) $(c,d) \neq (0,0)$

1° Généralités.

Si $c=0$, déjà traité en III

Si $c \neq 0$, f est définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.

$$\frac{az+b}{cz+d} - \frac{a}{c} = \frac{bc-ad}{c(cz+d)}$$

montre que :

- Si $bc-ad=0$, $f(z) = \frac{a}{c} \quad \forall z$. f est constante.
- Si $bc-ad \neq 0$, $\text{Dom } f = \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ et f est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$.

* Supposons $c \neq 0$ et $ad-bc \neq 0$:

$$f(z) = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z + \frac{d}{c}}$$

$$\text{donc } f = t_{\frac{a}{c}} \circ s_{\frac{bc-ad}{c^2}} \circ i \circ t_{\frac{d}{c}}$$

où $z \mapsto z + \alpha$ est la translation t_α

$z \mapsto \alpha z$ est la similitude directe s_α de centre 0, de rapport $|\alpha|$

et d'angle $\arg \alpha$

$z \mapsto \frac{1}{z}$ est l'inversion i de centre 0 et de rapport 1.

$z \mapsto \bar{z}$ est la symétrie σ_{Ox} , notée s_{Ox} .

Vu les propriétés des isométries, des similitudes, et des inversions, f transformera les cercles-droites en cercles-droites (éventuellement prisés d'

2°/ Lignes de niveau de $z \mapsto \left| \frac{z-a}{z-b} \right|$ $a \neq b ; a, b \in \mathbb{C}$

$$\forall k \in \mathbb{R}_+ \quad \left| \frac{z-a}{z-b} \right| = k \Leftrightarrow \frac{Am}{Bm} = k \Leftrightarrow Am^2 - k^2 Bm^2 = 0 \quad (*)$$

Fonction scalaire de Leibniz :

a) Si $k \neq 1$, soit G le barycentre de $A(1)$, $B(-k^2)$.

$$(*) \quad AG^2 - k^2 BG^2 + (1-k^2) Gm^2 + 2 \vec{Gm} \cdot (\vec{AG} - k^2 \vec{BG}) = 0$$

$$Gm^2 = \frac{k^2 BG^2 - AG^2}{1-k^2}$$

L'ensemble des m est vide ou égal à un cercle de centre G .

b) Si $k=1$, $(*) \quad Am^2 - Bm^2 = 0$

$$\text{Pour tout point } O : AO^2 + Om^2 + 2 \vec{AO} \cdot \vec{Om} - (BO^2 + Om^2 + 2 \vec{BO} \cdot \vec{Om}) = 0$$

$$AO^2 - BO^2 + 2 \vec{Om} \cdot (\vec{AO} - \vec{BO}) = 0$$

Prenons O milieu de AB :

$$(*) \Leftrightarrow \vec{Om} \cdot \vec{AB} = 0$$

$$\text{Cof: } \{m(z) / \left| \frac{z-a}{z-b} \right| = 1\} = \text{médiatrice de } AB.$$

3°/ Lignes de niveau de $z \mapsto \arg \frac{z-a}{z-b}$

$\alpha \in \mathbb{R}$ donné

$$\arg \frac{z-a}{z-b} = \alpha \quad [2\pi] \Leftrightarrow \widehat{Bm, Am} = \alpha \quad [2\pi] \Leftrightarrow \widehat{mB, mA} = \alpha \quad [2\pi]$$

On obtient un arc de cercle d'extrémités A et B .



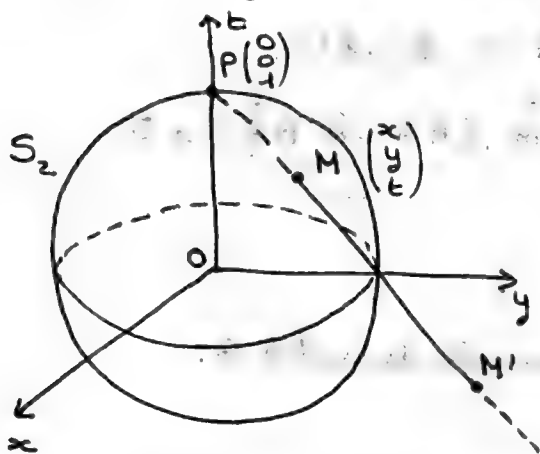
V Sphère de Riemann

$\left| \frac{z-1}{z+1} \right| < 1$ ab unen ab angul 1/2 10

1° Définition

\mathbb{C} identifié au plan xOy de \mathbb{R}^3

S_2 = sphère $x^2 + y^2 + t^2 = 1$ de \mathbb{R}^3 . S_2 est un e.t. compact.



$$M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{PM'} = \lambda \vec{PM} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ t-1 \end{pmatrix}$$

d'où $\lambda = \frac{1}{1-t}$

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{1-t} \\ y' = \frac{y}{1-t} \end{cases}$$

π = projection stéréographique de pôle $P(0,0,1)$.

$$\pi : S_2 \setminus \{P\} \longrightarrow xOy \quad \text{est un homéomorphisme,}$$

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} \longmapsto M' \begin{pmatrix} \frac{x}{1-t} \\ \frac{y}{1-t} \end{pmatrix}$$

car continue, bijective :

$$\begin{cases} \frac{x}{1-t} = X \\ \frac{y}{1-t} = Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (1-t)X \\ y = (1-t)Y \end{cases}$$

$$(1-t)^2(X^2 + Y^2) + t^2 = 1 \Rightarrow (X^2 + Y^2 + 1)t^2 - 2(X^2 + Y^2)t + X^2 + Y^2 - 1 = 0$$

$$\Delta' = (X^2 + Y^2)^2 - (X^2 + Y^2 + 1)(X^2 + Y^2 - 1) = 1$$

Des 2 racines $t = \frac{X^2 + Y^2 \pm 1}{X^2 + Y^2 + 1}$ on ne peut retenir que celle différente de 1.

π est bien bijective, et on constate que π^{-1} est continue.

On pose $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ = compactifié d'Alexandrov de \mathbb{C} = sphère de Riemann.

On prolonge π on $\bar{\pi} : S_2 \longrightarrow \bar{\mathbb{C}}$ en posant $\bar{\pi}(P) = \infty$, et on transporte la structure d'e.t. grâce à la bijection $\bar{\pi}$.

$\bar{\pi} : S_2 \longrightarrow \bar{\mathbb{C}}$ est un homéomorphisme.

2° Règles de calcul

\times et $+$ sont généralisés à $\bar{\mathbb{C}}$ en posant pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$z + \infty = \infty \quad z \cdot \infty = \infty \text{ si } z \neq 0$$

$$\infty + \infty = \infty \quad \infty \cdot \infty = \infty \quad \frac{\infty}{\infty} = 1 \quad \frac{1}{0} = \infty \quad \frac{1}{\infty} = 0$$

Enfin $\infty = \infty$

$\bar{\mathbb{C}}$ n'a cependant aucune structure algébrique classique.

3° Intérêt

E plan affine, en bijection avec \mathbb{C} .

On pose $\bar{E} = E \cup \{\omega\}$ et on prolonge l'application affine par : $\text{affixe}(\omega) = \infty$
 ω est "le point à l'infini".

\bar{E} = plan anallagmatique.

Définition : Un cercle de \bar{E} sera soit un cercle de E , soit la réunion d'une droite de E et du point à l'infini ω .

Avec cette définition, une inversion $i_{\Omega, R}$ transforme un cercle de \bar{E} en un cercle de \bar{E} (en posant $i_{\Omega, R}(\Omega) = \omega$, et vu le I).
 $i_{\Omega, R}(\omega) = \Omega$

4° Groupe des homographies de $\bar{\mathbb{C}}$

Soit $c \neq 0$.

On a vu que $\beta: \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ était bijective si $ad - bc \neq 0$.

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

Posons $\beta(-\frac{d}{c}) = \infty$ et $\beta(\infty) = \frac{a}{c}$.

On prolonge ainsi β en $\bar{\beta}: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$. On notera encore β au lieu de $\bar{\beta}$, et on constate :

$$\boxed{\begin{array}{l} \beta: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}} \text{ est bijective si } ad - bc \neq 0 \\ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \end{array}}$$

Prop: L'ensemble des homographies non singulières (ie tq $ad-bc \neq 0$) de $\bar{\mathbb{C}}$ dans $\bar{\mathbb{C}}$ forme un sous-groupe du groupe des permutations $\mathcal{P}(\bar{\mathbb{C}})$ isomorphe à $GL(\mathbb{C}^2)$

preuve:

$$\text{A } f_i(z) = \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i} \text{ on associe } M_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \in M_{\mathbb{C}}(2)$$

Posons $M_i = \mathcal{P}(f_i)$. \mathcal{P} est bijective de $\mathcal{H} = \{\text{homographies non singulières}\}$ sur $GL_{\mathbb{C}}(2)$ et $\mathcal{P}(f_1 \circ f_2) = \mathcal{P}(f_1) \cdot \mathcal{P}(f_2)$.

(\mathcal{H}, \circ) est donc un groupe par transport de structure. CQFD.

5° Groupe circulaire \mathcal{G} de $\bar{\mathbb{E}}$

C'est l'ensemble des bijections de $\bar{\mathbb{E}}$ dans $\bar{\mathbb{E}}$ conservant globalement les cercles de $\bar{\mathbb{E}}$. (\mathcal{G}, \circ) est un sous-groupe du groupe des permutations $\mathcal{P}(\bar{\mathbb{E}})$ de $\bar{\mathbb{E}}$.

Les isométries et similitudes de $\bar{\mathbb{E}}$ (prolongées en posant $f(\omega) = \omega$) et les inversions sont toutes dans \mathcal{G} . La réciproque est vraie:

Théorème: \mathcal{G} est engendré par les similitudes et les inversions de $\bar{\mathbb{E}}$.

(NB: Une isométrie est une similitude de rapport 1)

preuve:

* Soit $f \in \mathcal{G}$. On peut supposer $f(\omega) = \omega$ (sinon, $f(\omega) = \Omega \neq \omega$ et l'inversion $i_{\Omega, k}$ de pôle Ω permet d'écrire $i_{\Omega, k} \circ f(\omega) = i_{\Omega, k}(\Omega) = \omega$. On prend $f' = i_{\Omega, k} \circ f$ à la place de f).

Alors l'image d'une droite de \mathbb{E} est une droite de \mathbb{E} , et l'image d'un cercle de \mathbb{E} est un cercle de \mathbb{E} . (*)

f bijective et conservant l'alignement sera une application affine

(cf. Th. fondamental de la géométrie affine, Frenkel IX. Sp 91)

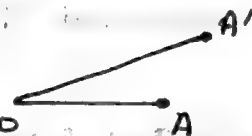
(cf CAPES 79 2^{comp.})

(*) car les dtes de $\bar{\mathbb{E}}$ contiennent ω , mais pas les cercles de \mathbb{E} . L'image d'une dte D de $\bar{\mathbb{E}}$ contiendra ω et ne pourra pas être un cercle de \mathbb{E} .

* Soit $O \in E$, $f(O) = O'$. $t_{O'O} \circ f(O) = O$ donc $f' = t_{O'O} \circ f$ admet O pour pt fixe.

Soit $A \neq O$. $f'(A) = A'$ et il existe une similitude s de centre O transformant A' en A . Alors $s \circ f'(A) = A$.

On travaillera dorénavant avec $f'' = s \circ f' \in G$ qui possède 2 points fixes O et A .
La droite $\Delta = OA$ sera invariante pt par pt par f'' .

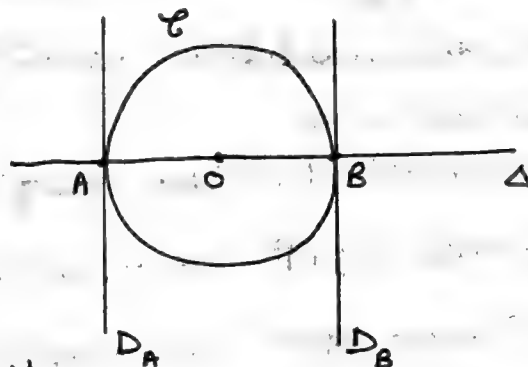


* Soit $f \in G$ admettant la droite Δ invariante pt par pt.

Soient \mathcal{C} un cercle centré sur Δ

A et B les intersections de Δ et \mathcal{C}

D_A et D_B les rayons à \mathcal{C} en A et B .



$$f(D_A) \parallel f(D_B)$$

$f(D_A)$ et $f(D_B)$ seront tangentes au cercle

$f(\mathcal{C})$ en A et B . $f(\mathcal{C})$ est un cercle de diamètre $[AB]$ (car $f(O) = O$, $f(A) = A$, $f(B) = B$) donc $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ et :

$$\begin{cases} f(D_A) = D_A \\ f(D_B) = D_B \end{cases}$$

Cel : Toute perpendiculaire à Δ est conservée globalement par f

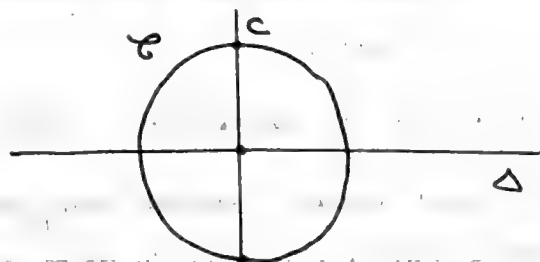
Tout cercle centré sur Δ " " "

* $\forall C \notin \Delta$ C_1 = symétrique de C / à Δ

\mathcal{C} = cercle de diamètre CC_1

On aura $f(CC_1) = CC_1$ (et $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$),

donc $f(C) \in \{C, C_1\}$



→ Si $f(C) = C$, $f = Id$ car f affine laissera fixe 3 pts C_1 affinement indépendants.

→ Si $f(C) = C_1$, composons f par la symétrie s_Δ par rapport à Δ .

$s_\Delta \circ f(C) = C$ et Δ sera invariante pt par pt par $s_\Delta \circ f$, donc $s_\Delta \circ f = Id$.

ie $f = s_\Delta$.

CQFD

Corollaire: (G, \circ) est un groupe isomorphe au groupe des transformations complexes de \mathbb{C} dans \mathbb{C} de la forme $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ ou $z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ (avec $ad-bc \neq 0$)

preuve: * G est clairement un sous-groupe de $\mathcal{P}(\mathbb{C})$.

* On a vu que: $\forall \beta \in G \quad \beta = \alpha_1 \circ \dots \circ \alpha_k$ où α_i est une similitude ou une inversion.

Donc $\alpha_i(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{si } \alpha_i \text{ est une similitude directe} \\ \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} & \text{" " " indirecte} \\ \frac{k}{\bar{z}-z_0} + z_0 & \text{" " " une inversion} \end{cases}$

β s'écrit donc sous la forme $\beta(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ou $\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ avec $ad-bc \neq 0$ comme on le voit par récurrence sur k :

C'est trivial si $k=1$. Si $\alpha_1 \circ \dots \circ \alpha_k(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ (par ex.), de 3 choses l'une:

* Si $\alpha_1(z) = \alpha z + \beta$ $\alpha_1 \circ \dots \circ \alpha_k(z) = \alpha \left(\frac{az+b}{cz+d} \right) + \beta$ est une homographie non singulière.

* Si $\alpha_1(z) = \alpha \bar{z} + \beta$ $\alpha_1 \circ \dots \circ \alpha_k(z) = \alpha \left(\frac{\bar{a}\bar{z} + \bar{b}}{\bar{c}\bar{z} + \bar{d}} \right) + \beta$ est de la forme $\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ et

* Si $\alpha_1(z) = \frac{k}{\bar{z}-z_0} + z_0$ $\alpha_1 \circ \dots \circ \alpha_k(z) = \frac{k}{\frac{az+b}{cz+d} - z_0} + z_0$ non singulière (i.e. $ad-bc \neq 0$ comme pour les homographies) est de la forme demandée.

On peut donc définir l'application:

$$\begin{aligned} \Psi: G &\longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{C}) \\ \beta &\longmapsto \beta(z) = \frac{az+b}{cz+d} \text{ ou } \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \text{ avec } ad-bc \neq 0. \end{aligned}$$

* Soit G le sous-ens. de $\mathcal{P}(\mathbb{C}^2)$ constitué des transformations $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ ou $z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ où $ad-bc \neq 0$.

$\Delta \Psi = G$ car si $\beta \in G$, $\beta(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ (par exemple) s'écrit $\beta(z) = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cz+d)}$

et permet d'écrire β comme composée de similitudes et d'inversions (cf IV), donc prouve que $\beta \in \Delta \Psi$. On ferait de même si $\beta(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$. Enfin Ψ est injective.

* $\Psi(\beta \circ \gamma) = \Psi(\beta) \circ \Psi(\gamma)$. G étant un groupe, la bijection Ψ de G sur G permet de structurer G en groupe par transport de structure.

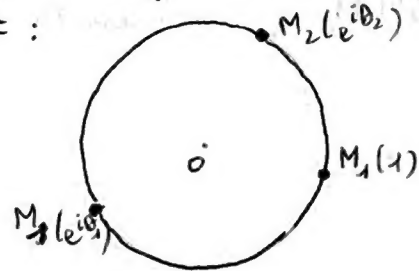
D'où le corollaire.

Application des nombres complexes à la géométrie :

Montrer qu'un triangle est équilatéral si son c.d.g coïncide avec le centre du cercle circonscrit. Connaissez-vous une démonstration géométrique de ce résultat ?

1) Supposons que $M_1 M_2 M_3$ soit un triangle dont le c.d.g coïncide avec le centre du cercle circonscrit. Dans un bon repère, on pourra alors supposer que les affixes z_k de ces sommets vérifient :

$$\begin{cases} z_k = e^{i\theta_k} \\ z_3 = 1 \\ z_1 + z_2 + z_3 = 0 \end{cases}$$



Tout revient donc à résoudre l'équation : $1 + e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} = 0$

On obtient :

$$\begin{cases} 1 + \cos \theta_1 + \cos \theta_2 = 0 & (1) \\ \sin \theta_1 + \sin \theta_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_1 \equiv -\theta_2 \quad [2\pi] \\ \text{ou} \\ \theta_1 \equiv \pi + \theta_2 \quad [2\pi] \end{cases}$$

$\theta_1 \equiv \pi + \theta_2$ entraînerait $1 + \cos(\pi + \theta_2) + \cos \theta_2 = 0$, ie $1 = 0$. Donc $\theta_1 \equiv -\theta_2$ et (1) devient :

$$1 + 2 \cos \theta_1 = 0$$

$$\cos \theta_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\theta_1 \equiv \pm \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$$

Ccl: $\theta_1 \equiv \pm \frac{2\pi}{3}$ et $\theta_2 \equiv \mp \frac{2\pi}{3}$. Le triangle $M_1 M_2 M_3$ sera bien équilatéral.

2) Démonstration géométrique :

On connaît la relation d'Euler $\vec{OH} = 3 \vec{OG}$ entre le centre O du cercle circonscrit à $M_1 M_2 M_3$, le c.d.g de ce triangle et son orthocentre H .

Ainsi $G = O$ si $O = H$. Mais alors $(M_1 O)$ sera à la fois hauteur de $M_1 M_2 M_3$ et médiane de $[M_2 M_3]$, d'où $M_1 M_3 = M_1 M_2$. On recommence avec $(M_2 O)$ pour conclure à $M_1 M_3 = M_1 M_2 = M_2 M_3$, ie $M_1 M_2 M_3$ est équilatéral. \square

* 2^e démonstration géométrique :

Si $G=0$, on a :

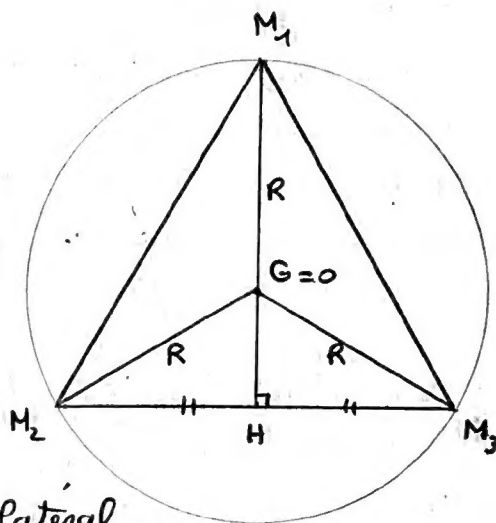
$$GH = \frac{GM_1}{2} = \frac{R}{2}$$

$$HM_3 = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = R \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow M_2M_3 = R\sqrt{3}$$

En recommençant, on conclut :

$$M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_1 = R\sqrt{3}$$

et $M_1M_2M_3$ est bien un triangle équilatéral.

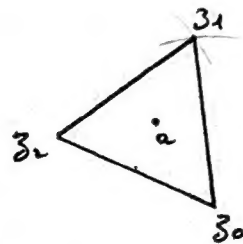


Condition pour que les racines de $z^3 + 3pz^2 + 3qz + r = 0$ soient les affixes de sommets d'un triangle équilatéral ? ($p, q, r \in \mathbb{C}$)

Lemme : z_0, z_1, z_2 sont les affixes des sommets d'un triangle équilatéral de cdg $a \in \mathbb{C}$ ssi :

$$\begin{cases} z_1 - a = j(z_0 - a) \\ z_2 - a = j^2(z_0 - a) \end{cases}$$

(Évident : rotation de centre a et d'angle $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$)



* 1^{er} cas : $a = 0$ $\begin{cases} z_1 = jz_0 \\ z_2 = j^2z_0 \end{cases}$ sont solutions de $z^3 + 3pz^2 + 3qz + r = 0$ ssi

$$\begin{cases} 3p = -\sigma_1 = -(z_0 + jz_0 + j^2z_0) = 0 \\ 3q = \sigma_2 = z_0z_1 + z_0z_2 + jz_1z_2 = jz_0^2 + j^2z_0^2 + z_0^2 = 0 \\ r = -z_0^3 \end{cases}$$

et l'équation s'écrit alors $z^3 - z_0^3 = 0$.

Ccl : Les racines de $z^3 + 3pz^2 + 3qz + r = 0$ sont les sommets d'un tri. équil. de cdg 0ssi $p = q = 0$

* 2^{es} cas : $a \neq 0$ On fait la translation $z = Z + a$ pour se ramener au 1^{er} cas.

L'équation s'écrit :

$$(Z+a)^3 + 3p(Z+a)^2 + 3q(Z+a) + r = 0$$

$$\text{soit } Z^3 + 3(a+p)Z^2 + 3(a^2 + 2ap + q)Z + r + 3aq + 3a^2p + a^3 = 0$$

D'après le cas précédent, cette dernière équation admettra Z_0, Z_1, Z_2 pour racines

telles que $\begin{cases} Z_1 = jZ_0 \\ Z_2 = j^2Z_0 \end{cases}$ (cf lemme)ssi : $\begin{cases} 3(a+p) = 0 \\ 3(a^2 + 2ap + q) = 0 \end{cases}$

ie ssi $\boxed{\begin{cases} a = -p \\ q = p^2 \end{cases}}$

Conclusion : La CNS cherchée est $q = p^2$. Alors l'équation s'écrit :

$$z^3 + 3pz^2 + 3p^2z + r = 0 \quad \text{ie} \quad (z+p)^3 + r - p^3 = 0, \text{ et le cdg du triangle a pour affixe } -p.$$